Exponentialgleichungen

Lösungsmethoden
und
vieeeele Trainingsaufgaben

für die Klassenstufe 10
und alle Oberstufenschüler, die das vergessen haben…

Datei – Nr. 12880

Friedrich Buckel

Stand 10. Februar 2019

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Man spricht von einer Exponentialgleichung, wenn die Unbekannte im Exponenten steht.

Beispiele:

$4^x = \frac{1}{2}$	(in § 1)
$4^x = 3$	(in § 2)
$5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-1} = 27$	(in § 3)
$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$	(in § 4)
$2^x + 3 \cdot 2^{-x} = 4$	(in § 4)

Zu jeder dieser Gleichungen gibt es ein günstiges Lösungsverfahren.
Diese Methoden wollen wir hier kennen lernen und trainieren.

Inhalt

§ 1 Einfache Exponentialgleichungen

Beispiel 1

$4^x = \frac{1}{2}$

Merkmal: Die Zahlen 4 und $\frac{1}{2}$ besitzen die gemeinsame Basis 2:

Denn $4 = 2^2$ und $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Konsequenz: ***Man schreibt die Gleichung um in*** $\left(2^2\right)^x = 2^{-1}$

Potenzgesetz: $\left(2^2\right)^x = 2^{2x}$: $2^{2x} = 2^{-1}$

Exponentenvergleich: $2x = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{1}{2}}$

Lösungsmenge: $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Beispiel 2

$27^{x-1} = 9$

Merkmal: Die Zahlen 27 und 9 besitzen die gemeinsame Basis 3:

Denn $27 = 3^3$ und $9 = 3^2$

Konsequenz: ***Man schreibt die Gleichung um in*** $\left(3^3\right)^{x-1} = 3^2$

Potenzgesetz: $\left(3^3\right)^{x-1} = 3^{3(x-1)} = 3^{3x-3}$: $3^{3x-3} = 3^2$

Exponentenvergleich: $3x - 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{5}{3}}$

Lösungsmenge: $L = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

Beispiel 3

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x} = 64$

Kurzlösung:

$\left(2^{-3}\right)^{2x} = 2^6$ (Gemeinsame Basis ist 2)

$2^{-6x} = 2^6$

$-6x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = -1}$

Lösungsmenge: $L = \{-1\}$

Beispiel 4

$0{,}25^{2x+1} = \sqrt[3]{16}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} = 16^{\frac{1}{3}}$ (Gemeinsame Basis ist 4 oder 2)

$\left(4^{-1}\right)^{2x+1} = \left(4^2\right)^{\frac{1}{3}}$

$4^{-2x-1} = 4^{\frac{2}{3}}$

$-2x - 1 = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -2x = \frac{5}{3}$

$x = -\frac{5}{6}$

Lösungsmenge: $L = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$

Aufgabenblatt

Aufgaben 1.1

Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $3^x = 27$ (b) $2^x = \sqrt{2}$ (c) $4^x = 2$

(d) $9^x = \frac{1}{3}$ (e) $125^x = \frac{1}{25}$ (f) $4^{-x} = 32$

Aufgaben 1.2

(a) $8^{-3x} = 16$ (b) $9^{4-x} = 81$ (c) $25^{3x+7} = \frac{1}{5}$

(d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 32$ (e) $4^{2x-1} = 8$ (f) $\frac{1}{27^x} = 9$

Aufgaben 1.3

(a) $2^x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (b) $8^{x+2} = 4$ (c) $2^{x^2} = \frac{1}{4}$

(d) $3^{\frac{1}{x}} = 9$ (e) $4^{2-x} = 8$ (f) $\frac{1}{9^{x+2}} = \sqrt{243}$

§ 2 Exponentialgleichungen mit verschiedenen Basen

Beispiel 5 $4^x = 3$

Die Zahlen 4 und 3 können von uns nicht als Potenzen mit gleicher Basis dargestellt werden (d. h. nicht mit „vernünftigen“ Exponenten).

Daher verwendet man eine Logarithmusmethode: Man logarithmiert die Gleichung:

$\lg 4^x = \lg 3$ oder $\log\left(4^x\right) = \log(3)$ oder $\ln\left(4^x\right) = \ln(3)$

Wenn man lg schreibt, dann verwendet man den sogenannten Zehnerlogarithmus, also den Logarithmus zur Basis 10, wofür man umständlicher auch $\log_{10}$ schreiben kann. Taschenrechner verwenden die Schreibweise log. Die Schreibweise ln bedeutet natürlicher Logarithmus also Logarithmus zur Basis e. (Darauf gehe ich hier nicht weiter ein.)

Nun wendet man das 3. Logarithmus-Gesetz an: $\boxed{\lg 4^x = x \cdot \lg 4}$

Damit gelingt es, die Unbekannte aus dem Exponenten herunter zu holen !

Hier die ganze Rechnung:

$$\begin{aligned} 4^x &= 3 \quad | \log \\ x \cdot \log 4 &= \log 3 \\ x &= \frac{\log 3}{\log 4} \approx 0{,}792 \end{aligned}$$

(Taschenrechner)

Beispiel 6

$$\begin{aligned} 3^{2x-3} &= 15 \quad | \log \\ \log 3^{2x-3} &= \log 15 \\ (2x-3)\cdot \log 3 &= \log 15 \\ 2x-3 &= \frac{\log 15}{\log 3} \\ 2x &= \frac{\lg 15}{\lg 3} + 3 \\ x &= \left(\frac{\lg 15}{\lg 3} + 3\right) : 2 = \frac{\lg 15}{2 \cdot \lg 3} + \frac{3}{2} \\ x &= \frac{\lg 15}{\lg 9} + \frac{3}{2} \approx 2{,}732 \end{aligned}$$

Achtung: Kürzen ist hier verboten !!!

Aufgabe 2.1 Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $3^x = 2$ (b) $5^x = 8$ (c) $3^{-x} = 16$

(d) $2^{3x} = 6$ (e) $3^{2x} = 7$ (f) $2^{x+2} = 10$

Aufgabe 2.2 Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $2^x = 5$ (b) $3^x = 24$ (c) $4^x = \frac{1}{3}$

(d) $2^{x+2} = 5$ (e) $3^{4x} = 5$ (f) $4^{2x+1} = 5$

§ 3 Exponentialgleichungen mit Summen

Beispiel 7 $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-1} = 27$

Usw. auf CD